

المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة n وذات المعاملات الثابتة:

* نعلم بأن المعادلة:

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = F(x) \quad (1)$$

حيث a_0, a_1, \dots, a_{n-1} هي أعداد حقيقية تدعى المعادلة تفاضلية الخطية ذات

معاملات ثابتة.

المعادلة المتجانسة المناظرة لها هي:

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (2)$$

والحل العام للمعادلة (1) يعطى بالمعادلة:

$$y = y_h + y_p$$

حيث y_h هو الحل العام لـ (2).

y_p هو الحل الخاص للمعادلة (1).

وكل من y_h, y_p يعتمد على قاعدة الحلول. وذكرنا في محاضرة سابقة أن مثل هذه المعادلات لها طريقة محددة في إيجاد قاعدة الحلول.

• قبل البدء بدراسة طريقة إيجاد قاعدة الحلول لدينا مفهومين جديدين سنستعرضهما:

الأول: المؤثر التفاضلي D .

الثاني: المؤثر التفاضلي العكسي.

III المؤثر التفاضلي: المؤثر التفاضلي D هو بالتعريف ذلك المؤثر الذي إذا أثر على الدالة y

بحال الناتج التأثير هو y' أي أن: $Dy = y'$

$$\text{لكن } y' = \frac{dy}{dx} \text{ أي أن } D = \frac{d}{dx}$$

وعدم وجود دالة على بعين ليس له أي معنى.

ونلاحظ من خلال المثال الآتي D عندما يؤثر على الدالة:

$$D \ln x = \frac{1}{x}$$

$$y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

نلاحظ أن المؤثر التفاضلي عندما أثر على دالة ما وهي الدالة اللوغاريتمية فلهذا المثال كان ناتج التأثير هو الدالة $\frac{1}{x}$ أي أن المؤثر التفاضلي D غير شكل الدالة ولم يغير من المتغير المستقل كجاء أمثلة أخرى.

★ نعرف المؤثر التفاضلي D^2 بأنه ذلك المؤثر الذي إذا أثر على الدالة y كان ناتج التأثير هو y'' .

$$D^2 y = y''$$

$$y'' = \frac{d^2}{dx^2} y$$

$$D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$$

⇐

ليس
له معنى ???

شكل عام نعرف المؤثر التفاضلي D^n بأنه ذلك المؤثر الذي إذا أثر على الدالة y كان ناتج التأثير هو المشتقة من الرتبة (n) للدالة (y) أي أن:

$$D^n y = y^{(n)}$$

$$y^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n} y \Rightarrow D^n = \frac{d^n}{dx^n}$$

وبما أن:

بناءً على ما سبق فإن المعادلة التفاضلية:

$$y^4 + 2y''' - y'' + 2y = \sin x$$

تكتب باستخدام المؤثر التفاضلي D على الصورة:

$$[D^4 + 2D^3 - D^2 + 2] y = \sin x$$

أو اختصاراً:

$$\varphi(D).y = \sin x$$

$$\varphi(D) = D^4 + 2D^3 - D^2 + 2$$

حيث:

و ندعو $\varphi(D)$ المؤثر التفاضلي كثير الحدود من الدرجة الرابعة.
أما المعادلة التفاضلية $\varphi(D)y = f(x)$ فنكتب اختصاراً على النحو:

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0)y = f(x)$$

أو اختصاراً:

$$\varphi(D)y = f(x)$$

$$\varphi(D) = \sum_{i=0}^n a_i D^i, \quad a_n = 1$$

حيث:

و ندعو $\varphi(D)$ في هذه الحالة مؤثر تفاضلي كثير حدود من الدرجة n .

★ هناك دوال لا يتغير شكلها إذا أثر عليها مؤثر تفاضلي

$$D \cdot e^{mx} = m \cdot e^{mx}$$

$$D^2 \cdot e^{mx} = m^2 \cdot e^{mx}, \quad \dots, \quad D^n \cdot e^{mx} = m^n \cdot e^{mx}$$

الدوال المميزة والقيم المميزة:

• إذا أثر المؤثر التفاضلي D على دالة ما ولم يتغير شكل الدالة عندئذ ندعو هذه الدالة بالدالة المميزة للمؤثر التفاضلي والقيمة العددية المرافقة لنتائج التأثير ندعوها القيمة المميزة.

★ بناءً على هذا التعريف نجد أن الدالة $y = e^{mx}$

هي دالة مميزة للمؤثر التفاضلي D بقيمة مميزة مقدارها m لأن D عندما يؤثر على y

المميزة الوحيدة للمؤثر التفاضلي D $D \cdot e^{mx} = m \cdot e^{mx}$ كما أن الدالة e^{mx} هي دالة مميزة

$$D^2 \cdot e^{mx} = m^2 \cdot e^{mx}$$

وهذه الدالة ليست الدالة الوحيدة للمؤثر التفاضلي D^2 إذ أن الدالة $\cos mx$ دالة مميزة للمؤثر التفاضلي D^2 بقيمة مميزة $-m^2$ أي:

$$D^2 \cdot \cos mx = -m^2 \cdot \cos mx$$

كذلك الدالة $y = \sin mx$ هي دالة مميزة للمؤثر التفاضلي D^2 بقيمة مميزة مقدارها

$$D^2 \cdot \sin mx = -m^2 \cdot \sin mx$$

وذلك لأن:

• أيضاً الدالة ψ_{mx} هي دالة مميزة للمؤثر التفاضلي D^2 بقيمة مميزة m^2 وذلك
 كُنْ: $D^2 \psi_{mx} = m^2 \psi_{mx}$

• وكذلك أيضاً الدالة ψ_{mx} هي دالة مميزة للمؤثر التفاضلي D^2 بقيمة مميزة
 مقدارها m^2 وذلك كُنْ:

$$D^2 \psi_{mx} = m^2 \psi_{mx}$$

• بشكل عام: الدالة ψ_{mx} هي دالة مميزة للمؤثر التفاضلي D^n بقيمة مميزة مقدارها m^n
 وذلك كُنْ:

$$D^n \psi_{mx} = m^n \psi_{mx}$$

• وفي الحالة العامة فإن هذه الدالة ليست الدالة المميزة الوحيدة للمؤثر التفاضلي D^n .

1- خواص المؤثر التفاضلي:

• المؤثر التفاضلي يتبادل الموضع مع الثابت العزبي أي أن:

$$D(A\psi) = A D\psi$$

بشكل عام

$$D^n(A\psi) = A \cdot D^n\psi$$

وعلى وجه العموم فإن:

$$\varphi(D)A\psi = A \varphi(D)\psi$$

$$\varphi(D)A\psi = \sum_{j=0}^n a_j D^j \psi = \sum_{j=0}^n a_j A D^j \psi$$

$$= A \cdot \sum_{j=0}^n a_j D^j \psi = A \cdot \varphi(D)\psi$$

• المؤثر التفاضلي خطي أي أن:

$$D(A_1 \psi_1 + A_2 \psi_2) = A_1 D\psi_1 + A_2 D\psi_2$$

$$D^n (A_1 y_1 + A_2 y_2) = A_1 D^n y_1 + A_2 D^n y_2$$

بشكل عام:

$$\varphi(D) (A_1 y_1 + A_2 y_2) = A_1 \varphi(D) y_1 + A_2 \varphi(D) y_2$$

على وجه الخصوص:

$$\begin{aligned} \varphi(D) (A_1 y_1 + A_2 y_2) &= \sum_{j=0}^n a_j D^j (A_1 y_1 + A_2 y_2) \\ &= \sum_{j=0}^n a_j (A_1 D^j y_1 + A_2 D^j y_2) \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^n a_j A_1 D^j y_1 + \sum_{j=0}^n a_j A_2 D^j y_2$$

$$= \cancel{A_1 \varphi(D) y_1} + A_1 \sum_{j=0}^n a_j D^j y_1 + A_2 \sum_{j=0}^n a_j D^j y_2$$

$$= A_1 \varphi(D) y_1 + A_2 \varphi(D) y_2$$

٣- المؤثر القاطن يخضع إلى قانون الأسس [أي ضرب القوى لجميع الأسس] أي أن:

$$D^m D^n y = D^m D^n y = D^{m+n} y = \text{المؤثر القاطن}$$

٤- إذا كان $\varphi_1(D)$ ، $\varphi_2(D)$ ، $\varphi_3(D)$ ثلاث مؤثرات تفاضلية كل منها كثيرة حدود فعدد

$$\{\varphi_1(D) + \varphi_2(D)\} y = \{\varphi_2(D) + \varphi_1(D)\} y \quad \star$$

$$\{\varphi_1(D) + (\varphi_2(D) + \varphi_3(D))\} y = \text{المجموع التجميعي}$$

$$= \{(\varphi_1(D) + \varphi_2(D)) + \varphi_3(D)\} y \quad \star \star$$

$$\{\varphi_1(D) \varphi_2(D)\} y = \{\varphi_2(D) \varphi_1(D)\} y \quad \text{الضرب التبادلي} \quad \star \star \star$$

$$\{ \varphi_1(x) \cdot (\varphi_2(x) - \varphi_3(x)) \}' y = \{ (\varphi_2(x) \cdot \varphi_1(x)) \cdot \varphi_3(x) \}' y \quad (****)$$

$$\{ \varphi_1(x) \cdot (\varphi_2(x) + \varphi_3(x)) \}' y = \{ \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) + \varphi_1(x) \cdot \varphi_3(x) \}' y \quad (*****)$$

ملاحظة هامة: الخواص السابقة لا تتحقق إذا لم يكن المؤثر التفاضلي كثير حدود ذات معاملات ثابتة.

والمثال التالي يوضح صحة هذه الملاحظة:

مثال: أوجد ناتج: $(xD+1)Dy$

$$\begin{aligned} (xD+1)Dy &= (xD+1)y' = xDy' + y' \\ &= x y'' + y' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(xD+1)y &= D(x y' + y) = D x y' + D y = y' + x y'' + y' \\ &= x y'' + 2y' \end{aligned}$$

نلاحظ أن $(xD+1)Dy \neq D(xD+1)y$ أي أن الضرب غير تبديلي عندما يكونه المعاملات متغيرة.

0- إذا كان المؤثر التفاضلي $\varphi(D)$ كثير حدود من الدرجة n فقد نكتب:

$$\varphi(D)y = \int (D - m_1)(D - m_2) \dots (D - m_n) y$$

حيث m_1, m_2, m_n هي جذور المعادلة $\varphi(D)=0$

يمكن تحليل المؤثر كثير الحدود إلى جداء عوامل أولية ويكونه المعاملات ثابتة فالترتيب ليس له مغايرة.

مثال توضيحي: أوجد ناتج: $(D^2 + 4D + 3)(x + e^{-x})$

$$= (D^2 + 4D + 3)x + (D^2 + 4D + 3)e^{-x}$$

$$= (D^2 x + 4D x + 3x) + (D^2 e^{-x} + 4D e^{-x} + 3e^{-x})$$

$$= (0+4+3x) + (e^{-x} - \underline{4e^{-x}} + 3e^{-x})$$

$$= 3x+4$$

$$(D^2+4D+3)(x+e^{-x})$$

$$= (0+1)(0+3)(x+e^{-x})$$

$$= (0+1) [(0+3)x + (0+3)e^{-x}] = (0+1) [0x+3x+0e^{-x}+3e^{-x}]$$

$$= (0+1) [1+3x-e^{-x}+3e^{-x}] = (0+1) [3x+1+2e^{-x}]$$

$$= 0(3x+1) + (3x+1) + (0+1) \cdot 2e^{-x}$$

$$= 3+3x+1+2[0 \cdot e^{-x}+e^{-x}]$$

$$= 4+3x+2[-e^{-x}+e^{-x}] = 3x+4$$

الدالة الأسية e^{mx} دالة مميزة بالمؤثر التفاضلي كثير الحدود بدرجة $\varphi(D)$ معينة مقدارها $\varphi(m)$ □
 أنه أن $\varphi(D) \cdot e^{mx} = \varphi(m) \cdot e^{mx}$

$$D \cdot e^{mx} = m \cdot e^{mx}$$

$$D^2 \cdot e^{mx} = m^2 \cdot e^{mx}$$

$$D^j \cdot e^{mx} = m^j \cdot e^{mx}$$

الإثبات: نعلم أن:

$$\varphi(D) \cdot e^{mx} = \sum_{j=0}^n a_j D^j \cdot e^{mx} = \sum_{j=0}^n a_j m^j \cdot e^{mx} = \varphi(m) \cdot e^{mx}$$

$$D=m=2$$

$$(D^4+2D^2+3D+1) \cdot e^{2x}$$

مثال: أوجد ناتج:

$$= (2^4+2(2)^2+3(2)+1) \cdot e^{2x} = (16+8+6+1) \cdot e^{2x}$$

$$= 29 \cdot e^{2x}$$

١٠ (خاصة الزخرفة الأسية):

$$\varphi(D) [e^{mx}, v(x)]$$

عندما يؤثر المؤثر التفاضلي

ناتج تأثير يساويه

$$e^{mx} \rho(D+m).v(x)$$

أخيه أن الشئ الذي يدفعه خارج

تأثير المؤثر التفاضلي كثير الحدود هو أن نفرض كل D ب $(D+m)$

$$D[e^{mx}.v(x)] = m.e^{mx}.v(x) + e^{mx}.D.v(x)$$

الإثبات:

$$= e^{mx} [m + D].v(x)$$

$$D^2.e^{mx}.v(x) = D.D.e^{mx}.v(x)$$

$$= D[e^{mx} [D+m].v(x)] = m.e^{mx} [D+m].v(x) + D^{\uparrow} e^{mx} (D+m).v(x)$$

$$= e^{mx} [m(D+m).v(x) + D(D+m).v(x)]$$

$$= e^{mx} [m(D+m) + D(D+m)].v(x)$$

$$= e^{mx} [m + D](D+m).v(x) = e^{mx} (D+m)^2.v(x)$$

بشكل عام فإن:

$$D^n.e^{mx}.v(x) = m^n.e^{mx}.v(x) + n.m^{n-1}.e^{mx}.\rho.v(x) +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2!}.m^{n-2}.e^{mx}.D^2.v(x) + \dots + e^{mx}.D^n.v(x)$$

وذلك بالاعتماد على قانون ليستر للانتقاء العليا.

$$(u.v)^n = u^n.v + n.u^{n-1}.v' + \frac{n(n-1)}{2!}.u^{n-2}.v'' + \dots + u.v^n$$

SUBJECT: _____

$$D^n e^{mx} \cdot v(x) = e^{mx} \left[m^n \cdot v(x) + \frac{n!}{1!} m^{n-1} D \cdot v(x) + \frac{n(n-1)}{2!} m^{n-2} D^2 \cdot v(x) + \dots + D^n \cdot v(x) \right]$$

$$= e^{mx} \left[m^n + n \cdot m^{n-1} + 0 + \frac{n(n-1)}{2!} m^{n-2} D^2 + \dots + D^n \right] \cdot v(x)$$

$$= e^{mx} (D+m)^n \cdot v(x)$$

$$\varphi(D) \cdot e^{mx} \cdot v(x) = \sum_{j=0}^n a_j \cdot D^j \cdot e^{mx} \cdot v(x) \quad \text{والآن فإن}$$

$$= \sum_{j=0}^n a_j \cdot e^{mx} (D+m)^j \cdot v(x)$$

$$= e^{mx} \cdot \sum_{j=0}^n a_j \cdot (D+m)^j \cdot v(x) = e^{mx} \varphi(D+m) \cdot v(x)$$

هذا هو المطلوب